# ALGÈBRE LINÉAIRE : EXERCICES CORRIGÉS

**Bernard Dupont**

Bernard.Dupont@univ-lille1.fr

## Exercice M1

**Enoncé**

Calculer "à la main" puis avec Maple les déterminants des matrices suivantes :

1. $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
4. $M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
5. $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$
6. $M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$7.\ M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$8.\ M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Quelle méthode est la plus fiable?

**Solution**

Avec la méthode Maple, le travail le plus rébarbatif est la construction des matrices ...

```
> restart;
  M[1]:=Matrix(3,3,[[1,1,1],[-1,0,1],[-1,-1,0]]):
  M[2]:=Matrix(3,3,[[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]]):
  M[3]:=Matrix(3,3,[[1,1,1],[1,2,3],[1,3,6]]):
  M[4]:=Matrix(4,4,[[3,1,1,1],[1,3,1,1],[1,1,3,1],[1,1,1,3]]):
  M[5]:=Matrix(4,4,[[1,1,1,1],[1,2,3,4],[1,3,6,10],[1,4,10,20]]
  ):
  M[6]:=Matrix(4,4,[[1,2,3,4],[-2,1,-4,3],[3,-4,-1,2],[4,3,-2,
  -1]]):
  M[7]:=Matrix(5,5,[[1,0,2,3,0],[-1,2,0,1,4],[-2,1,1,0,1],[3,2,
  1,0,-1],[0,0,-1,2,1]]):
  M[8]:=Matrix(5,5,[[1,0,-1,3,4],[2,1,0,-1,1],[1,0,3,1,5],[-1,
  2,1,0,3],[0,0,5,2,1]]):
```

Mais il faut reconnaître que la longueur de la préparation est compensée par la vitesse d'éxécution des calculs.

```
> with(LinearAlgebra):
  seq(det(M[i])=Determinant(M[i]),i=1..8);
```

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1,\ det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2,\ det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1,\ det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \quad \textbf{(1.1)}$$

$$= 48,\ det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}\right) = 1,\ det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 900,$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 126,\ det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -411$$

# Exercice M2

**Enoncé**

On considère la matrice carrée d'ordre $n$ :

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

1. Construire une fonction-procédure qui, à tout $n$, associe la matrice $M_n$.

2. Calculer les déterminants des matrices $M_n$ pour $n = 1,.., 10$.

3. Calculer le rapport $\dfrac{det(M_{n+1})}{det(M_n)}$ pour différentes valeurs de $n$. En déduire une relation entre $det(M_{n+1})$ et $det(M_n)$ puis donner une formule de calcul de $det(M_n)$ pour tout $n$.

**Solution**

1. La matrice $M_n = (a_{ij})$ est composée de 2 sauf sur la diagonale principale où les éléments sont les premiers entiers naturels. Donc : si $i = j$, $a_{ij} = i$ et si $i \neq j$, $a_{ij} = 2$. On écrit tout d'abord une fonction-procédure, notée **a**, à deux variables (la première pour le numéro de la ligne et la seconde pour le numéro de la colonne) générant les éléments de la matrice puis une deuxième fonction-procédure, notée **mat**, associant à $n$ la matrice $M_n$.

```
> restart;
  a:=(x,y)->piecewise(x=y,x,2);
  mat:=n->Matrix(n,n,[seq([seq(a(i,j),j=1..n)],i=1..n)]);
  mat(10);#test pour n=10
```

$$a := (x, y) \rightarrow piecewise(x = y, x, 2)$$

$$mat := n \rightarrow Matrix(n, n, [seq([seq(a(i,j), j=1..n)], i=1..n)])$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1)}$$

2. Il suffit de construire avec **seq** la suite des $n$ premiers déterminants. Rappelons que la commande **Determinant** se trouve dans le paquetage **LinearAlgebra** et qu'il faut donc le charger.

```
> with(LinearAlgebra):
  deter:=seq(Determinant(mat(n)),n=1..10);
```

$$deter := 1, -2, -2, -4, -12, -48, -240, -1440, -10080, -80640 \quad \textbf{(2.2)}$$

3. Par **seq**, on calcule aisément les 9 premiers rapports $\frac{det(M_{n+1})}{det(M_n)}$ .

```
> seq(deter[k+1]/deter[k],k=1..9);
```

$$-2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad \textbf{(2.3)}$$

A partir de $n = 2$, on a visiblement la relation $det(M_{n+1}) = (n-1)det(M)$. Les déterminants successifs sont les termes d'une suite de premier terme $u_0 = -2$ et vérifiant l'équation de récurrence $u_{n+1} = (n+1)u_n$. On résout cette équation avec **rsolve**.

```
> rsolve({u(n+1)=(n+1)*u(n),u(0)=-2},u(n));
```

$$-2\,\Gamma(n+1) \quad \textbf{(2.4)}$$

Rappelons que la fonction $\Gamma$ se confond avec la factorielle quand son argument est un entier. On peut maintenant créer une fonction-procédure associant à tout $n$ ($\geq 1$) le déterminant de $M_n$ :

```
> dn:=unapply(-2*GAMMA(n),n);
  seq(dn(i),i=1..9);
  expand(dn(150));#la fonction expand force l'évaluation de la
  fonction gamma pour n élevé.
```

$$dn := n \rightarrow -2\,\Gamma(n)$$

$$-2, -2, -4, -12, -48, -240, -1440, -10080, -80640$$

$$-761784527526113945397191048701473867091940477146816855767311677775731054 9\backslash$$
$$9793864524168765984900414860502810504995805605550221666931579339288474 5\backslash$$
$$9892789608876659012279431437190576714305392661662987388905429615792724 9\backslash$$
$$4963595673600000000000000000000000000000000000000 \quad \textbf{(2.5)}$$

**Annexe**

Pour construire la matrice, les amateurs de programmation préfèrent généralement créer une procédure, appelée ici **mat**, qui a pour argument le nombre de lignes et de colonnes et qui utilise des tests conditionnels.

```
> mat:=proc(N)
  local i,j,a,M;
  for i from 1 to N do
  for j from 1 to N do
            if i=j then a[i,j]:=i
            else a[i,j]:=2
            end if;
            end do;
       end do;
  M:=Matrix(N,N,[seq([seq(a[i,j],j=1..N)],i=1..N)]);
  end proc;
```

$mat :=$ **proc**$(N)$ **(2.6)**

```
    local i, j, a, M;
    for i to N do
        for j to N do if i = j then a[i, j] := i else a[i, j] := 2 end if end do
    end do;
    M := Matrix(N, N, [seq([seq(a[i, j], j = 1 ..N)], i = 1 ..N)])
end proc
```

Le test pour $N$=10 donne les mêmes résultats que ci-dessus.

```
> mat(10);
  Determinant(mat(10));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$-80640 \qquad \textbf{(2.7)}$$

# Exercice M3

**Enoncé**

On considère la matrice carrée d'ordre $n$ :

$$M_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Construire une fonction-procédure qui, à tout $n$, associe la matrice $M_n$.

2. Calculer les déterminants des matrices $M_n$ pour $n = 1,.., 20$.

3. Enoncer une conjecture sur $det(M_n)$.

**Solution**

Pour les deux premières questions, on s'inspire directement de la méthode développée dans l'exercice M2.

1. La matrice $M_n = (a_{ij})$ est composée de 2 sur la diagonale principale, de 1 si $j = i - 1$ ou $j = i + 1$, de 0 sinon.

```
> restart;
  a:=(x,y)->piecewise(x=y,2,y=x-1 or y=x+1,1,0);#création des
  composantes de la matrice
  mat:=n->Matrix(n,n,[seq([seq(a(i,j),j=1..n)],i=1..n)]);
  #création de la matrice
  mat(10);#test pour n=10
```

$$a := (x, y) \rightarrow piecewise(x = y, 2, y = x - 1 \ \textbf{or} \ y = x + 1, 1, 0)$$

$$mat := n \rightarrow Matrix(n, n, [seq([seq(a(i, j), j = 1..n)], i = 1..n)])$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1)}$$

<u>Remarque</u> : Alternativement, la matrice $M_n$ peut se construire avec la commande dédiée **BandMatrix** du paquetage **LinearAlgebra**. Ses arguments sont, dans l'ordre : une liste de nombres, le nombre de sous-diagonales au dessus et en dessous de la diagonale principale, le nombre de lignes de la matrice, enfin le nombre de colonnes.

```
> mmat:=n->LinearAlgebra:-BandMatrix([1,2,1],1,9,9);
```

```
mmat(9);
```

$$mmat := n \rightarrow LinearAlgebra{:}\text{-}BandMatrix([1, 2, 1], 1, 9, 9)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2)}$$

2.

```
> with(LinearAlgebra):
deter:=seq(Determinant(mat(n)),n=1..20);
```

$$deter := 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 \quad \textbf{(3.3)}$$

3. Les déterminants sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 1.

# Exercice M4

**Enoncé**

Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} & \binom{6}{0} \\ \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \binom{6}{1} \\ \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} \\ \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} \end{bmatrix}$$

dont les coefficients sont les combinaisons de $p$ ($p = 0, 1, 2, 3$) éléments parmi $n$ ($n = 3, 4, 5, 6$).

**Solution**

Les combinaisons sont données par la commande **binomial(n,p)**. La matrice s'écrit donc :

```
> restart;
mat:=Matrix(4,4,[seq([seq(binomial(j+2,i-1),j=1..4)],i=1..4)]
);
```

**(4.1)**

$$mat := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1)}$$

D'où le déterminant :

```
> with(LinearAlgebra):
  Determinant(mat);
```

$$1 \quad \textbf{(4.2)}$$

# Exercice M5

**Enoncé**

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b\,c & c\,a & a\,b \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

On demande de présenter le résultat le plus simple possible.

**Solution**

Dans ce genre d'exercice, il faut appliquer la commande **`factor`** sur chaque déterminant pour avoir un résultat simple.

```
> restart;
  M[1]:=Matrix(3,3,[[1,1,1],[b+c,c+a,a+b],[b*c,c*a,a*b]]):
  M[2]:=Matrix(3,3,[[a,a+1,a+2],[a+1,a+2,a+3],[a+2,a+3,a+4]]):
  M[3]:=Matrix(4,4,[[0,a,b,c],[a,0,c,b],[b,c,0,a],[c,b,a,0]]):
  M[4]:=Matrix(4,4,[[a,0,b,a],[b,b,0,a],[b,a,0,b],[a,b,0,a]]):
  with(LinearAlgebra):
  det(M[1])=factor(Determinant(M[1]));
```

```
det(M[2])=factor(Determinant(M[2]));
det(M[3])=factor(Determinant(M[3]));
det(M[4])=factor(Determinant(M[4]));
```

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b\,c & c\,a & a\,b \end{bmatrix}\right) = (b-c)\,(a-c)\,(a-b)$$

$$det\left(\begin{bmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix}\right) = (b+a-c)\,(a-b+c)\,(b+a+c)\,(a-c-b)$$

$$det\left(\begin{bmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{bmatrix}\right) = -b\,(a+b)\,(a-b)^2 \qquad \textbf{(5.1)}$$

# Exercice M6

**Enoncé**

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $M$ est inversible.
2. Calculer $M^{-1}$.
3. Vérifier que $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$.

**Solution**

1. $M$ est inversible ou régulière si son déterminant est non nul.

```
> restart;
M:=Matrix(3,3,[[1,1,1],[-1,0,1],[-1,-1,0]]);
with(LinearAlgebra):
detM:=Determinant(M);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$detM := 1 \tag{6.1}$$

Comme $det(M) = 1 \neq 0$, $M$ est inversible et admet un inverse.

2. Calcul de la matrice inverse :

```
> invM:=M^(-1);
```

$$invM := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

3. Les calculs séparés de $M.M^{-1}$ puis de $M^{-1}.M$ prouvent l'égalité demandée.

```
> M.invM;
  invM.M;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Mais on peut recourir au test **Equal** :

```
> Equal(M.invM,invM.M);
```

$$true \tag{6.4}$$

# Exercice M7

**Enoncé**

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $M$ est inversible.
2. Calculer $M^{-1}$.
3. Vérifier que $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$.

**Solution**

1. On teste le déterminant.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  assume(a::real):
  M:=Matrix(2,2,[[1,a],[-a,2]]);
```

```
detM:=Determinant(M);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a\sim \\ -a\sim & 2 \end{bmatrix}$$

$$detM := 2 + a\sim^2 \tag{7.1}$$

Le déterminant est non nul, ce que confirme le test suivant :

```
> is(detM=0);
```

$$false \tag{7.2}$$

La matrice est inversible quel que soit $a$.

2. Calcul de l'inverse :

```
> invM:=M^(-1);
```

$$invM := \begin{bmatrix} \frac{2}{2 + a\sim^2} & -\frac{a\sim}{2 + a\sim^2} \\ \frac{a\sim}{2 + a\sim^2} & \frac{1}{2 + a\sim^2} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

3. Vérification :

```
> simplify(M.invM);
  simplify(invM.M);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

# Exercice M8

**Enoncé**

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Diagonaliser $M$. On notera $G$ la matrice diagonale et $P$ la matrice de passage.

2. Vérifier que $M = P.G.P^{-1}$.

**Solution**

1. La commande `EigenVectors` avec la précision `output=list` donne toutes les informations désirées :

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  M:=Matrix(4,4,[[2,-1,1,2],[-1,2,-1,1],[1,-1,2,-1],[2,1,-1,2]]
```

```
);
vpspM:=Eigenvectors(M,output=list);
```

$$M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$vpspM := \left[\left[1, 1, \left\{\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]\right\}\right], \left[-1, 1, \left\{\left[\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right\}\right], \left[4, 2, \left\{\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]\right\}\right]\right] \quad \textbf{(8.1)}$$

Il y a trois valeurs propres : $-1$ d'ordre de multiplicité 1 avec un sous-espace propre associé de dimension 1; 1 d'ordre de multiplicité 1 avec un sous-espace propre associé de dimension 1; 4 d'ordre de multiplicité 2 avec un sous-espace propre associé de dimension 2. La matrice $M$ est donc diagonalisable et on a :

```
> G:=DiagonalMatrix([-1,1,4,4],4);
```

$$G := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2)}$$

```
> P:=Transpose(Matrix(4,4,[[-1,-1/2,1/2,1],[0,1,1,0],[1,0,0,1],
  [1,-1,1,0]]));#il faut transposer les lignes!
```

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.3)}$$

D'où $P^{-1}$ :

```
> invP:=P^(-1);
```

**(8.4)**

$$invP := \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.4)}$$

2. La vérification est une simple formalité avec le test **Equal** :

```
> Equal(M,P.G.invP);
```

$$true \quad \textbf{(8.5)}$$

# Exercice M9

**Enoncé**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1.
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - 3z = -3 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 3y + 6z + 10t = 0 \\ x + 4y + 10z + 20t = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y-2z=31 \\ x+y+z=3 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x+y+z+t+u=7 \\ 3x+2y+z+t-3u=-2 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ 5x+4y+3z+3t-u=12 \end{cases}$$

**Solution**

Dans tous les cas, on commence par écrire les équations et les inconnues pour générer avec la commande **GenerateMatrix** la forme matricielle du système, soit $A.X=B$. On vérifie que $A$ est inversible par le test $det(A) \neq 0$. Si $A$ est inversible, alors la solution est donnée par $X=A^{-1}.B$. Si $A$ n'est pas inversible, on invoque l'instruction très puissante **LinearSolve**.

1.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  eqs:=2*x-y-z=4,3*x+4*y-2*z=11,3*x-2*y+4*z=11;
  inc:=x,y,z;
  A,B:=GenerateMatrix([eqs],[inc]);
  detA:=Determinant(A);
```

$$eqs := 2x-y-z=4,\ 3x+4y-2z=11,\ 3x-2y+4z=11$$

$$inc := x, y, z$$

$$A, B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$detA := 60 \qquad \textbf{(9.1)}$$

Comme le déterminant de $A$ est non nul, $A$ est inversible et la solution du système est donnée par $X=A^{-1}.B$.

```
> sol:=A^(-1).B;
```

$$sol := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.2)}$$

Le résultat est confirmé par **LinearSolve** :

```
> LinearSolve(A,B);
```

**(9.3)**

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.3}$$

2.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  eqs:=3*x+y+z=1,x-y+2*z=2,x+3*y-3*z=-3;
  inc:=x,y,z;
  A,B:=GenerateMatrix([eqs],[inc]);
  detA:=Determinant(A);
```

$$eqs := 3\,x + y + z = 1,\ x - y + 2\,z = 2,\ x + 3\,y - 3\,z = -3$$

$$inc := x, y, z$$

$$A, B := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$detA := 0 \tag{9.4}$$

Le test du déterminant indique que les équations du système sont linéairement dépendantes. Dans ce cas, **LinearSolve** donne la solution.

```
> LinearSolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\,_t_3 \\ -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\,_t_3 \\ _t_3 \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

Il y a une infinité de solutions, qui sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\,z \\ -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\,z \\ z \end{bmatrix}$ avec $z$ réel ( $_t_3$ dans le code interne Maple).

3.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  eqs:=3*x+2*y+z=5,2*x+3*y+z=1,2*x+y+3*z=11,x+2*y+3*z=7;
  inc:=x,y,z;
  A,B:=GenerateMatrix([eqs],[inc]);
  detA:=Determinant(A);
```

$$eqs := 3\,x + 2\,y + z = 5,\ 2\,x + 3\,y + z = 1,\ 2\,x + y + 3\,z = 11,\ x + 2\,y + 3\,z = 7$$

$$inc := x, y, z$$

$$A, B := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-Determinant) invalid input:
LinearAlgebra:-Determinant expects its 1st argument, A, to be
of type Matrix(square) but received Matrix(4, 3, {(1, 1) = 3,
(1, 2) = 2, (1, 3) = 1, (2, 1) = 2, (2, 2) = 3, (2, 3) = 1,
(3, 1) = 2, (3, 2) = 1, (3, 3) = 3, (4, 1) = 1, (4, 2) = 2,
(4, 3) = 3})
```

Maple signale que la matrice $A$ devrait être carrée (square) pour calculer son déterminant mais que ce n'est pas le cas pour ce système d'équations (qui comporte 4 équations pour 3 inconnues). Ce qui n'empêche pas que le système admette une solution comme le montre **LinearSolve** :

```
> LinearSolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

4. Cette question ne présente aucune difficulté.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  eqs:=x+y+z+t=0,x+2*y+3*z+4*t=0,x+3*y+6*z+10*t=0,x+4*y+10*
  z+20*t=0;
  inc:=x,y,z,t;
  A,B:=GenerateMatrix([eqs],[inc]);
  detA:=Determinant(A);
```

$$eqs := x + y + z + t = 0, x + 2\,y + 3\,z + 4\,t = 0, x + 3\,y + 6\,z + 10\,t = 0, x + 4\,y + 10\,z + 20\,t = 0$$

$$inc := x, y, z, t$$

$$A, B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$detA := 1 \tag{9.7}$$

```
> sol:=A^(-1).B;
```

**(9.8)**

$$sol := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

5.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  eqs:=x+y-3*z=1,2*x+y-2*z=1,x+y+z=3,x+2*y-3*z=1;
  inc:=x,y,z;
  A,B:=GenerateMatrix([eqs],[inc]);
  detA:=Determinant(A);
```

$$eqs := x + y - 3\,z = 1,\ 2\,x + y - 2\,z = 1,\ x + y + z = 3,\ x + 2\,y - 3\,z = 1$$

$$inc := x, y, z$$

$$A, B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-Determinant) invalid input:
LinearAlgebra:-Determinant expects its 1st argument, A, to be
of type Matrix(square) but received Matrix(4, 3, {(1, 1) = 1,
(1, 2) = 1, (1, 3) = -3, (2, 1) = 2, (2, 2) = 1, (2, 3) = -2,
(3, 1) = 1, (3, 2) = 1, (3, 3) = 1, (4, 1) = 1, (4, 2) = 2,
(4, 3) = -3})
```

Même type de problème que dans la question 3. Essayons **LinearSolve**.

```
> LinearSolve(A,B);
Error, (in LinearAlgebra:-LA_Main:-LinearSolve) inconsistent
system
```

Maple signale que le système d'équations est impossible. Il comporte 4 équations pour 3 inconnues mais aucun triplet $(x, y, z)$ ne peut être solution.

6.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  eqs:=x+y+z+t+u=7,3*x+2*y+z+t-3*u=-2,y+2*z+2*t+6*u=23,5*x+4*
  y+3*z+3*t-u=12;
  inc:=x,y,z,t,u;
  A,B:=GenerateMatrix([eqs],[inc]);
  detA:=Determinant(A);
```

$$eqs := x + y + z + t + u = 7,\ 3\,x + 2\,y + z + t - 3\,u = -2,\ y + 2\,z + 2\,t + 6\,u = 23,\ 5\,x + 4\,y + 3\,z + 3\,t - u = 12$$

$$inc := x, y, z, t, u$$

$$A, B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 23 \\ 12 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-Determinant) invalid input:
LinearAlgebra:-Determinant expects its 1st argument, A, to be
of type Matrix(square) but received Matrix(4, 5, {(1, 1) = 1,
(1, 2) = 1, (1, 3) = 1, (1, 4) = 1, (1, 5) = 1, (2, 1) = 3,
(2, 2) = 2, (2, 3) = 1, (2, 4) = 1, (2, 5) = -3, (3, 1) = 0,
(3, 2) = 1, (3, 3) = 2, (3, 4) = 2, (3, 5) = 6, (4, 1) = 5,
(4, 2) = 4, (4, 3) = 3, (4, 4) = 3, (4, 5) = -1})
```

Réponse logique de Maple car le système a 4 équations pour 5 inconnues.

```
> LinearSolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} -16 + _t_3 + _t_4 + 5\,_t_5 \\ 23 - 2\,_t_3 - 2\,_t_4 - 6\,_t_5 \\ _t_3 \\ _t_4 \\ _t_5 \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

Le système ne comprend que deux équations linéairement indépendantes. La réponse fournie indique que les solutions sont données par $x = -16 + z + t + 5\,u$ et $y = 23 - 2\,z - 2\,t - 6\,u$, avec $z$ (code interne $_t_3$), $t$ (code interne $_t_4$) et $u$ (code interne $_t_5$) réels.