

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE (1) : SOLUTIONS DES EXERCICES

Bernard Dupont

Bernard.Dupont@univ-lille1.fr

▼ Exercices mathématiques

▼ Exercice M.1

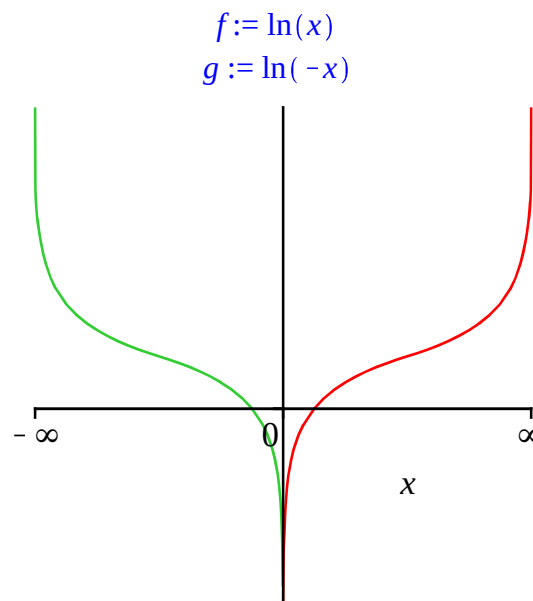
Enoncé

Représentez dans le même graphique les fonctions définies par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(-x)$. Vérifier que la commande **plot** tient compte de leur domaine de définition respectif.

Solution

Après avoir assigné à **f** et **g** les expressions des deux fonctions, on fait appel à **plot** en passant en premier argument un ensemble constitué par **f** et **g** (entre accolades) et en second argument l'intervalle démarrant à $-\infty$ (**-infinity**) et terminant à $+\infty$ (**infinity**).

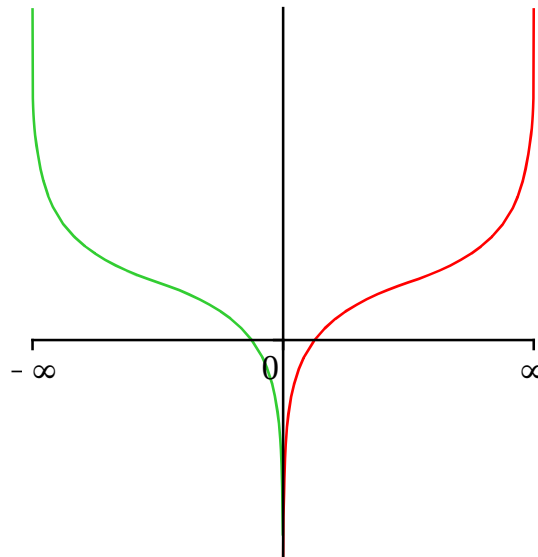
```
> restart; f:=log(x); g:=log(-x); plot({f,g}, x=-infinity..infinity);
```



Alternativement, on pouvait assigner à **f** et **g** des fonctions.

```
> restart; f:=x->log(x); g:=x->log(-x); plot({f,g}, -infinity..infinity);
```

$f := x \rightarrow \log(x)$
 $g := x \rightarrow \log(-x)$



Dans les deux cas, on constate bien que **plot** tient compte du domaine de définition de chaque fonction : **log(x)** est représenté sur $]0; +\infty[$ et **log(-x)** sur $] -\infty; 0[$.

▼ Exercice M.2

Enoncé

Représentez dans le même graphique les trois fonctions définies par $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ et $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Que pensez-vous de la sortie graphique?

Solution

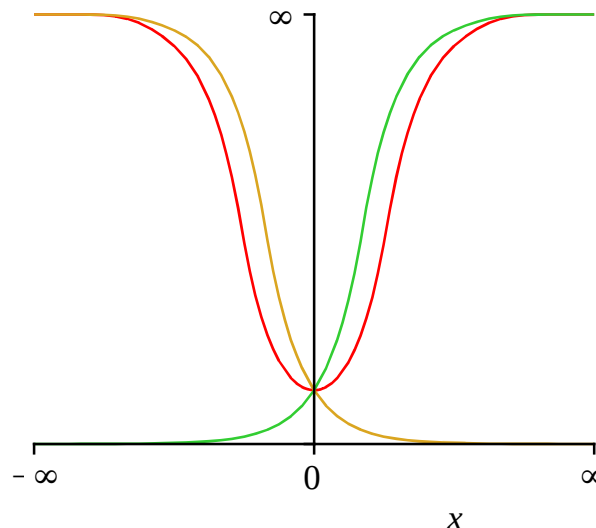
Comme dans l'exercice M.1, on assigne aux lettres **f**, **g** et **h** les expressions des fonctions puis on réunit les tracés dans un même graphe.

```
> restart; f:=exp(x); g:=exp(-x); h:=(exp(x)+exp(-x))/2; plot(
    {f,g,h}, x=-infinity..infinity);
```

$$f := e^x$$

$$g := e^{-x}$$

$$h := \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$



L'allure des courbes a de quoi surprendre quand x tend vers l'infini. En fait, la borne

supérieure des images est $+\infty$, ce que signale le symbole ∞ sur l'axe des ordonnées, et il faut comprendre que les fonctions f et h tendent vers "plus l'infini" quand x tend vers l'infini et que g et h tendent vers "plus l'infini" quand x tend vers "moins l'infini".

Exercice M.3

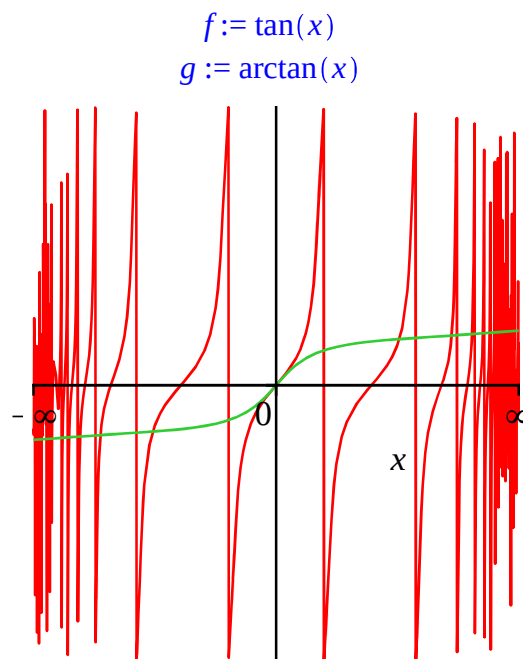
Enoncé

Représentez dans le même graphique les fonctions définies par $f(x) = \tan(x)$ et $g(x) = \text{Arctg}(x)$. Améliorez le résultat graphique en retenant un intervalle significatif de $\mathbb{R}$.

Solution

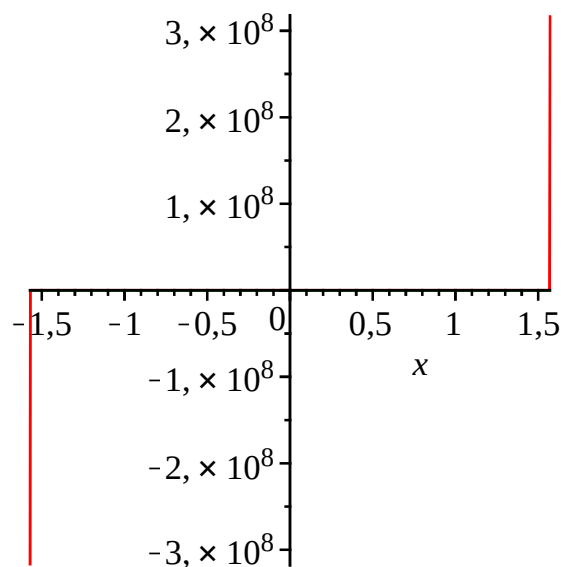
Un premier jet donne un résultat visuel décevant.

```
> restart; f:=tan(x); g:=arctan(x); plot({f,g}, x=-infinity..infinity);
```



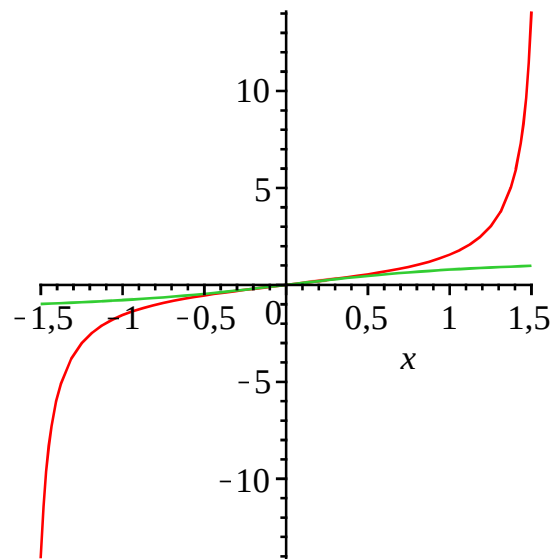
Vu les propriétés de symétrie de la fonction tangente, on restreint la représentation graphique à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

```
> plot({f,g}, x=-Pi/2..Pi/2);
```



Le résultat est franchement illisible. Il faut encore restreindre l'intervalle pour avoir un résultat à peu près correct.

```
> plot({f,g},x=-1.5..1.5);
```



Le chapitre consacré aux graphes en deux dimensions donnera des techniques pour améliorer la présentation des deux courbes.

▼ Exercices économiques

▼ Exercice E.1 (Fonctions d'utilité)

Enoncé

Représentez dans le même graphique la fonction d'utilité logarithmique $u1(c) = \ln(c)$ et la fonction CIES (à élasticité de substitution intertemporelle constante) $u2(c) = \frac{c^{\frac{1}{4}}}{1 - \frac{1}{4}}$.

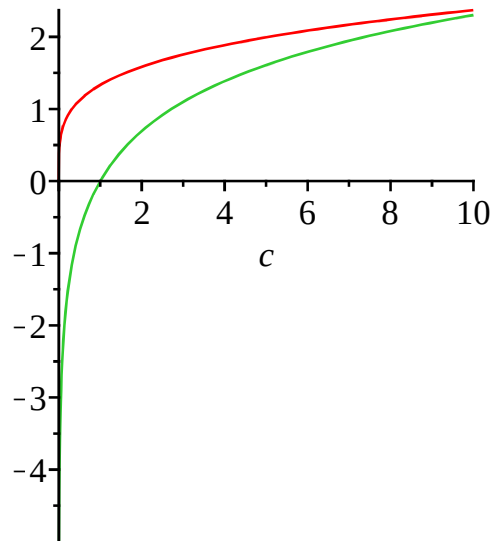
Vérifient-elles les propriétés usuelles d'une fonction d'utilité?

Solution

```
> restart; u1:=log(c); u2:=c^(1/4)/(1-1/4); plot({u1,u2},c=0..10);
```

$$u1 := \ln(c)$$

$$u2 := \frac{4}{3} c^{1/4}$$



Ces deux fonctions d'utilité ont de bonnes propriétés :

1. Plus le niveau de consommation est élevé, plus la satisfaction retirée de la consommation est élevée. L'utilité marginale est positive.
2. Plus le niveau de consommation est élevé, moins un accroissement donné de consommation augmente la satisfaction ressentie par le consommateur. L'utilité marginale est décroissante.

▼ Exercice E.2 (Fonction de demande)

Enoncé

La demande d'un bien Q dépend de son prix P , du prix d'un bien substitut P_s et du revenu des ménages Y selon la relation $Q = -30 P + 2 P_s + 0.05 Y$.

1. Créer trois fonction de demande **f1**, **f2** et **f3**, dépendant respectivement du prix du bien, du prix du bien substitut et du revenu.
 2. Quel est l'effet d'une augmentation du prix du bien substitut sur la courbe de **f1**?
 3. Quel est l'effet d'une augmentation du revenu sur la courbe de **f1**?
 4. Quel est l'effet d'une augmentation du prix sur la courbe de **f2**?
 5. Quel est l'effet d'une augmentation du revenu sur la courbe de **f2**?
 6. Quel est l'effet d'une augmentation du prix sur la courbe de **f3**?
 7. Quel est l'effet d'une augmentation du prix du bien substitut sur la courbe de **f3**?
- Pour les questions 2 à 7, on devra attribuer des valeurs aux variables exogènes puis faire un graphe avec trois courbes représentatives.

Solution

1. La question suggère d'assigner trois fonctions. On commence par poser une expression puis on utilise la commande **unapply** pour créer les fonctions demandées.

```
> restart;
Q:=-30*P+2*Ps+0.05*Y;
f1:=unapply(Q,P);
f2:=unapply(Q,Ps);
f3:=unapply(Q,Y);
```

```
Q := -30 P + 2 Ps + 0.05 Y
f1 := P → -30 P + 2 Ps + 0.05 Y
f2 := Ps → -30 P + 2 Ps + 0.05 Y
f3 := Y → -30 P + 2 Ps + 0.05 Y
```

(2.2.1)

2. On fixe Y à 1000. L'expression $f1(P)$ devient alors :

```
> Y:=1000;f1(P);
```

$$Y := 1000$$
$$-30 P + 2 P_s + 50.00 \quad (2.2.2)$$

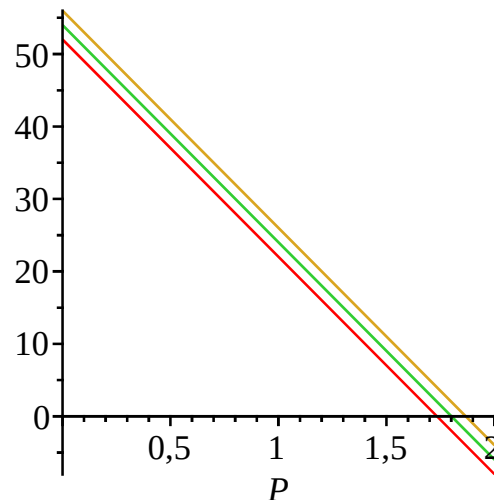
On crée une fonction dépendant du prix du bien substitut :

```
> f11:=unapply(f1(P),Ps);
```

$$f11 := P_s \rightarrow -30 P + 2 P_s + 50.00 \quad (2.2.3)$$

Il devient possible de représenter la fonction $f1$ pour plusieurs valeurs de P_s , Y restant fixé à 1000.

```
> plot({f11(1),f11(2),f11(3)},P=0..2);
```



La courbe de demande est translatée vers le haut quand le prix du bien substitut s'élève.

L'interprétation économique est évidente : les consommateurs reportent leur demande sur le bien dont le prix relatif est abaissé.

3. Désassignons Y pour libérer cette variable de la valeur attribuée dans la question précédente puis fixons P_s à 2.

```
> Y:='Y';Ps:=2;f1(P);
```

$$Y := Y$$
$$P_s := 2$$
$$-30 P + 4 + 0.05 Y \quad (2.2.4)$$

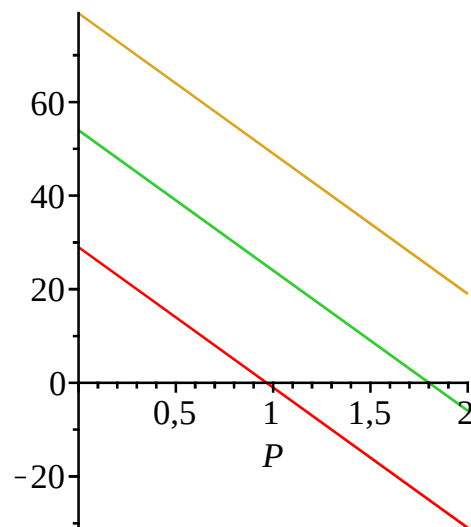
Avec la même méthode que dans la question précédente, on crée une fonction dépendant du revenu.

```
> f12:=unapply(f1(P),Y);
```

$$f12 := Y \rightarrow -30 P + 4 + 0.05 Y \quad (2.2.5)$$

On rassemble dans un graphe les droites de demande pour plusieurs valeurs de Y .

```
> plot({f12(500),f12(1000),f12(1500)},P=0..2);
```



Pour un prix du bien substitut constant, la courbe de demande est translatée vers le haut quand le revenu s'élève. Ce phénomène n'étonnera personne ...

Remarque : Les solutions aux questions suivantes utilisent exactement la méthode développée jusqu'ici. Elles sont condensées et tout commentaire technique est désormais superflu.

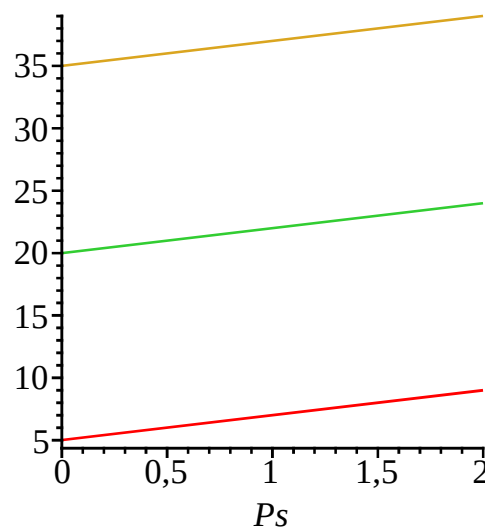
4. Le revenu est fixé à 1000.

```
> Ps:='Ps';Y:=1000;
  f21:=unapply(f2(Ps),P);
  plot({f21(0.5),f21(1),f21(1.5)},Ps=0..2);
```

$P_s := P_s$

$Y := 1000$

$f_{21} := P \rightarrow -30 P + 2 P_s + 50.00$



Le revenu des consommateurs étant invariable, l'augmentation du prix du bien se traduit par une translation vers le bas de la courbe de demande du bien : il y a report de la demande vers le bien substitut, quel que soit son prix.

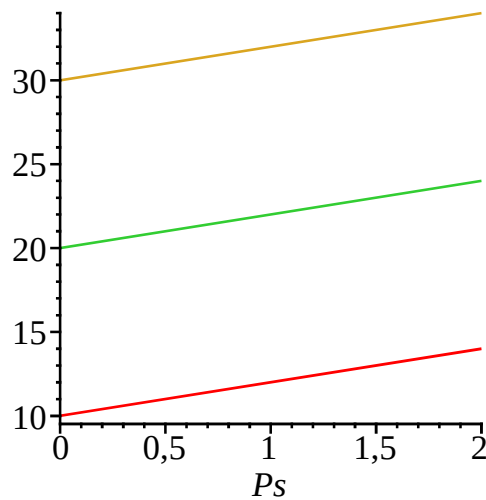
5. Le prix du bien est fixé à 1.

```
> Y:='Y';P:=1;f22:=unapply(f2(Ps),Y);plot({f22(800),f22
  (1000),f22(1200)},Ps=0..2);
```

$Y := Y$

$P := 1$

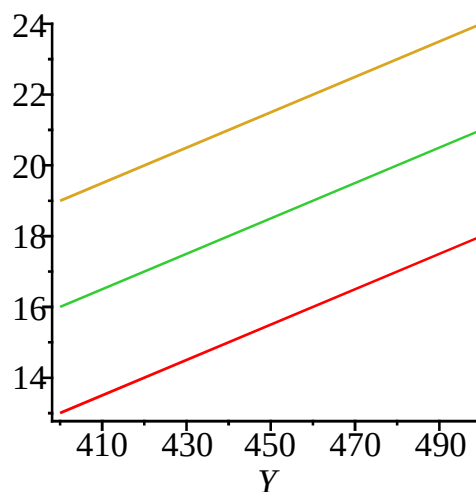
$f_{22} := Y \rightarrow -30 + 2 P_s + 0.05 Y$



Pour un prix donné du bien, un accroissement du revenu translate vers le haut la droite de demande en fonction du prix du bien substitut.

6. Le prix du bien substitut est fixé à 1.

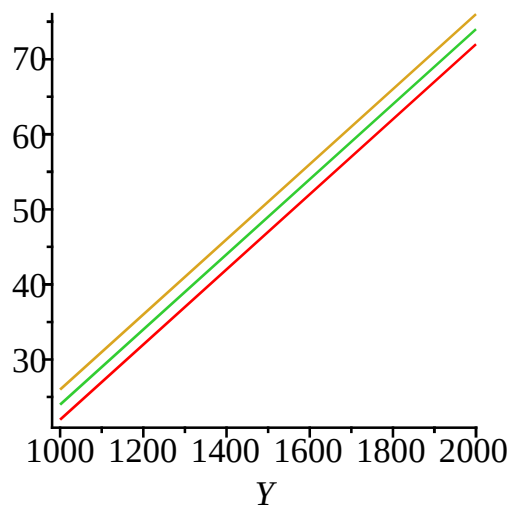
```
> Y:='Y';Ps:=1;
f31:=unapply(f3(Y),P);
plot({f31(0.1),f31(0.2),f31(0.3)},Y=400..500);
Y:=Y
Ps:=1
f31:=P→-30P+2+0.05Y
```



Le prix du substitut étant donné, l'augmentation du prix du bien translate vers le bas la courbe de demande en fonction du revenu.

7. Le prix du bien est fixé à 1.

```
> Ps:='Ps';P:=1;f32:=unapply(f3(Y),Ps);
plot({f32(1),f32(2),f32(3)},Y=1000..2000);
Ps:=Ps
P:=1
f32:=Ps→-30+2Ps+0.05Y
```

Le prix du bien étant donné, l'augmentation du prix du bien substitut translate vers le haut la courbe de demande du bien en fonction du revenu.

▼ Exercice E.3 (Fonction de demande)

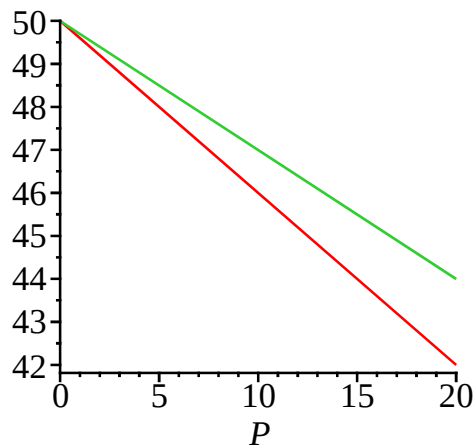
Enoncé

La demande d'un bien Q dépend de son prix P selon la relation affine $Q = -0.3 P + 50$. Suite à un changement du goût des consommateurs, la relation devient $Q = -0.4 P + 50$. Visualisez l'effet de ce changement sur la courbe de demande.

Solution

Il suffit de représenter les deux droites de demande dans le même plan PQ pour constater que la droite pivote vers le bas.

```
> restart;
plot({-0.3*P+50, -0.4*P+50}, P=0..20);
```



▼ Exercice E.4 (Equilibre sur un marché)

Enoncé

La demande d'un bien est donnée par $D = -a P + b$ et l'offre par $Q = c P + d$. Tous les paramètres a , b , c et d sont strictement positifs et $b > d$. Représentez graphiquement l'équilibre du marché.

Solution

On commence par assigner les expressions de la demande et de l'offre.

```
> restart;
```

Qd:=-a*P+b;#on ne peut pas assigner l'expression à la lettre ' D' car cette lettre est réservée
Qs:=c*P+d;

$$Q_d := -a P + b$$

$$Q_s := c P + d$$

(2.4.1)

On donne un jeu de valeurs aux paramètres.

> a,b,c,d:=0.3,100,0.2,10;

$$a, b, c, d := 0.3, 100, 0.2, 10$$

(2.4.2)

Il ne reste plus qu'à tracer les deux droites dans le plan. L'équilibre se trouve à leur intersection : l'abscisse de l'équilibre exprime le prix d'équilibre du bien; l'ordonnée donne les quantités échangées pour ce prix d'équilibre.

> plot({Qd,Qs},P=0..330);

